ALGA E

http://claudiomath.co.cc

Departamento de Matemática (FCT/UNL)

Programa:

1. Sistemas de equações lineares
2. Operações com matrizes
3. Subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^n$
4. Determinantes
5. Aplicações lineares
6. Bases
7. Diagonalização
8. Espaços vectoriais

Bibliografia:

- HOWARD ANTON e ROBERT C.BUSBY, *Álgebra Linear Contemporânea*, Bookman, 2006.
- HOWARD ANTON e CHRIS RORRES, *Elementary Linear Algebra-Applications version*, 8th Edition, John Wiley and Sons,Inc., 2000.
- HOWARD ANTON e CHRIS RORRES, *Álgebra Linear com Aplicações*, 8ª Edição, Bookman, 2001.
- Departamento Matemática FCT, Álgebra Linear e Geometria Analítica-Texto Teórico (Clip)

Capítulo 1

Sistemas de Equações Lineares

Aborda-se um processo sistemático de resolução de sistemas de equações lineares- Método de eliminação de Gauss Jordan

- Uma equação da recta em $\mathbb{R}^2$ pode ser dada pela expressão

$$ax + by = c,$$

em que a, b não são ambos nulos.

- Uma equação geral do plano em $\mathbb{R}^3$, pode ser dado pela expressão

$$Ax + By + Cz = D,$$

em que A, B, C não são todos nulos.

Definição:

Uma **equação linear** nas n variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b,$$

em que $a_1, a_2, ..., a_n$ são constantes, não todas nulas,(a que chamaremos **coeficientes**) e b é outra constante (a que chamaremos **termo independente**).
As variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ designam-se por **incógnitas**.

No caso de $b = 0$, teremos a equação linear

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 0.$$

Equação Linear Homogénea

Definição:

A uma colecção finita de equações lineares chama-se **sistema de equações lineares**.

Termos independentes

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Sistema de m equações lineares e n incógnitas $x_1, x_2, \dots x_n$

Definição: (Conjunto-solução de um sistema)

Uma **solução** de um sistema nas incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ é uma sequência de n números $s_1, s_2, \dots, s_n$ tais que, substituindo em cada equação $x_1, x_2, \dots, x_n$ por $s_1, s_2, \dots, s_n$, todas as equações se transformam numa proposição verdadeira.

O conjunto formado por todas as soluções de um sistema chama-se **conjunto-solução** do sistema.

Exemplo: Para o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 & = & 0, \end{cases}$$

? $x_1 = 0, \ x_2 = 1, \ x_3 = 1$ **?** **?** $x_1 = 1, \ x_2 = 0, \ x_3 = 1$ **?**

Classificação de sistemas

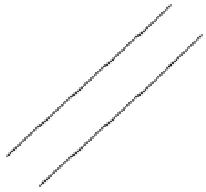
- **Impossível** **(Sem Soluções)**
- **Possível e determinado** **(Com uma só solução)**
- **Possível e indeterminado** **(Com + de uma solução)**

Interpretação Geométrica do Conjunto solução

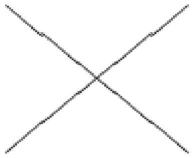
- Intersecção de 2 rectas em $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y & = & b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y & = & b_2 \end{cases}$$

Cada solução deste sistema corresponde a um ponto de intersecção destas rectas.



Sist. impossível



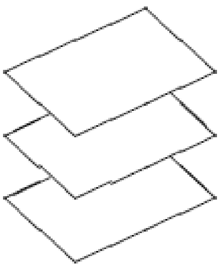
Sist. possível e determinado

Sist. Possivel e

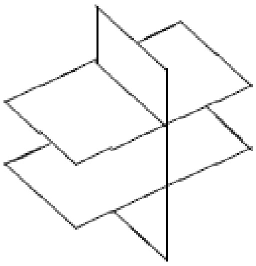
Indeterminado

- Intersecção de 3 planos em $\mathbb{R}^3$:

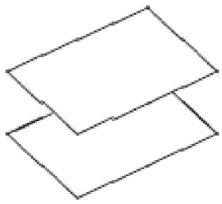
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z & = & b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z & = & b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z & = & b_3 \end{cases}$$



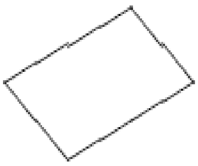
nenhuma solução,
3 planos paralelos



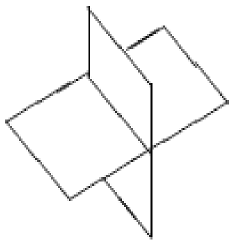
nenhuma solução,
2 planos paralelos



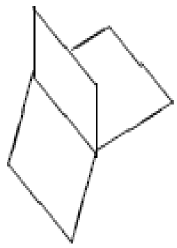
nenhuma solução,
2 planos coincidentes
paralelos ao outro



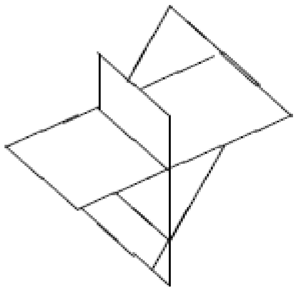
uma infinidade de soluções,
3 planos coincidentes,
a intersecção é um plano



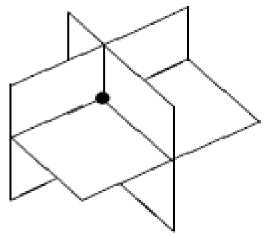
uma infinidade de soluções,
2 planos coincidentes
a intersecção é uma recta



uma infinidade de soluções,
a intersecção é uma recta



nenhuma solução



uma solução,
a intersecção é um ponto

Resolução de sistemas de equções lineares

Método de Eliminação de Gauss-Jordan

$$
\begin{cases}
a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\
a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\
a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3
\end{cases}
$$

1. Trocamos duas equações de posição
2. Substituimos uma equação, pelo resultado de multiplicarmos essa equação por uma constante não nula
3. Substituimos uma equação, pelo resultado de somarmos um múltiplo de outra equação a essa equação.

$$
\begin{cases}
a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\
\qquad\quad\; a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\
\qquad\qquad\qquad\; a_{33}z = b_3
\end{cases}
$$

”sistema triangular Superior”

1 2 3

$$
\begin{cases}
x = s_1 \\
y = s_2 \\
z = s_3
\end{cases}
$$

“Solução”

Sistemas e Matrizes

Definição:

Em matemática chama-se matriz a qualquer quadro de números do tipo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

"Matriz com m linhas e n colunas" $m \times n$

- Para facilitar os cálculos na resolução de sistemas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

"Matriz do simples sistema"
(Matriz dos coeficientes)
(m× n)

"Matriz dos termos independentes"
(m× 1)

"Matriz das incógnitas"
(n× 1)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

$[A|B]$

"Matriz ampliada do sistema"
$m \times (n+1)$

Matriz em Forma de Escada e Escada Reduzida

$$\begin{bmatrix} \underline{1} & 1 & -1 \\ 0 & \underline{2} & 1 \\ \underline{1} & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Pivot(de uma linha) = O 1º elemento não nulo da linha

Definição:

Dizemos que uma matriz está em **forma de escada**, **f.e.**, se:

- Em duas linhas quaisquer, não nulas, o pivot da linha inferior ocorre mais à direita do que o pivot da linha superior.
- Em duas linhas quaisquer, não nulas, o pivot da linha inferior ocorre mais à direita do que o pivot da linha superior.

Quais estão em forma de escada?

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Definição:

Dizemos que uma matriz está em **forma de escada reduzida**,**f.e.r.**, se estiver em forma de escada com cada pivot igual a 1 e os restantes elementos de cada coluna, a que pertença um pivot, iguais a zero.

Quais estão em forma de escada reduzida?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolução de sistemas usando a matriz ampliada

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

$$\updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \xrightarrow{\;1\;\;2\;\;3\;} \left[\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & c_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{mn} & c_m \end{array}\right]$$

Operações do metodo de eliminação de Gauss-Jordan

$$\Big\downarrow \; 1\;\;2\;\;3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & s_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & s_m \end{array}\right]$$

Transformações elementares nas linhas:

1. Trocar duas linhas
2. Substituir uma linha, pelo resultado de multiplicarmos essa linha por uma constante não nula
3. Substituir uma linha, pelo resultado de somarmos um múltiplo de outra linha a essa linha.

Notação:

1. $l_i \leftrightarrow l_j$ para indicar que trocámos a linha i com a linha j.
2. $l_i \rightarrow al_i$ para indicar que multiplicámos a linha i pela constante, não nula, a.
3. $l_i \rightarrow (l_i + bl_j)$ para indicar que somámos à linha i, a linha j depois de multiplicada por b.

Exercício 1: Classifique e resolva o sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} & y & +2z & = & \frac{5}{2} \\ 2x & & +z & = & 2 \\ x & -y & +z & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercício 2: Classifique e resolva o sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x & -y & +z & = & 1 \\ 2x & & +z & = & 2 \\ 3x & -y & +2z & = & 3. \end{array}\right.$$

Exercício 3: Classifique e resolva o sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & -z & = & 2 \\ & 2y & +z & = & 0 \\ x & +3y & & = & 3. \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\underset{l_3 \to (l_3 - l_2)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{l_3 \to (l_3 - l_2)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

que corresponde ao sistema impossível

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & -z & = & 2 \\ & 2y & +z & = & 0 \\ & & 0 & = & 1. \end{array}\right.$$

CS= $\emptyset$

- O sistema do exercício 2, depois do método de eliminação de Gauss-Jordan, é equivalente a

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x & & +\frac{1}{2}z & = & 1 \\ & y & -\frac{1}{2}z & = & 0 \\ & & 0 & = & 0. \end{array}\right. \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

x,y $\longrightarrow$ líderes
z $\longrightarrow$ livre

CS= $\{(1 - \frac{1}{2}z, \frac{1}{2}z, z) \ : \ z \in \mathbb{C}\}$

Característica de uma Matriz

Observação

1. Se aplicarmos o método de eliminação de Gauss a uma determinada matriz, obtemos **uma** sua forma de escada. Se além deste, utilizarmos o método de eliminação de Gauss-Jordan obtemos **a** sua forma de escada reduzida.

Só existe uma

Podem existir várias

Proposição:

Seja C uma matriz. Qualquer matriz em forma de escada obtida de C, tem o mesmo número de linhas não nulas.

Definição:

Seja C uma matriz. Ao número de linhas não nulas de qualquer sua forma de escada chama-se **característica de C** e denota-se por $\mathbf{r}(\mathbf{C})$.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to (l_3 - l_1)]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[l_3 \to (l_3 - l_2)]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \to \frac{1}{2} l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r(A) = 2$ $\qquad$ $r(A) = 2$

Exercício 4:
Determine as características da matriz simples e da matriz ampliada do sistema

$$\begin{cases} x & +y & -z & = & 2 \\ & 2y & +z & = & 0 \\ x & +3y & & = & 3. \end{cases}$$

$$\therefore \qquad r([A|B]) = 3 \text{ (número de linhas não nulas) e } r(A) = 2.$$

Observações:

Se A é uma matriz com m linhas e n colunas e [A|B] é a matriz ampliada de um sistema, então

1. $r(A) \leq n$; 2. $r(A) \leq m$; 3. $r(A) \leq r([A|B])$

Discussão de um Sistema

Teorema:

Dado um sistema com m equações a n incógnitas e sendo A a matriz simples do sistema e [A|B] a matriz ampliada, então:

1. *Se $r(A) < r([A|B])$, o sistema é impossível*
2. *Se $r(A) = r([A|B]) = n$, o sistema é possível e determinado*
3. *Se $r(A) = r([A|B]) < n$, o sistema é possível e indeterminado, sendo $n - r(A)$ o número de variáveis livres do sistema a que se chama* **grau de indeterminação do sistema**.

Obs: Um sistemas homogéneo é sempre possível.

Exercício 5:

Discutir o sistema nas incógnitas x, y, z e nos parâmetros a e b:

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & 4 \\ & ay & +z & = & 2 \\ & & (a-1)z & = & b. \end{cases}$$

A matriz ampliada é:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & a & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & b \end{array}\right]$$

• Se $a \neq 0$ e $a \neq 1 \Longrightarrow$ a matriz $[A|B]$ está em forma de escada $\Longrightarrow$ $r(A) = 3 = r([A|B])$ =número de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema é possível e determinado.

• Se $a = 1$, a matriz ampliada é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right].$$

Se $a = 1$ e $b \neq 0 \Longrightarrow r(A) = 2 < 3 = r([A|B]) \Longrightarrow$ sistema impossível.

Se $a = 1$ e $b = 0 \Longrightarrow r(A) = 2 = r([A|B]) < 3$ =número de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema possível e indeterminado com grau de indeterminação $n - r(A) = 3 - 2 = 1$.

• Se $a = 0$, a matriz ampliada é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & b \end{array}\right]$$ (não está em forma de escada).

Calculemos a sua característica:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & b \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to (l_3 + l_2)]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b+2 \end{array}\right].$$

Se $a = 0$ e $b \neq -2 \implies r(A) = 2 < 3 = r([A|B]) \implies$ sistema impossível.

Se $a = 0$ e $b = -2 \implies r(A) = 2 = r([A|B]) < 3 =$número de incógnitas $\implies$ sistema possível e indeterminado com grau de indeterminação $n - r(A) = 3 - 2 = 1$.

Concluíndo,

- possível e determinado se $(a \neq 0$ e $a \neq 1)$,
- possível e indeterminado se $(a = 0$ e $b = -2)$ ou $(a = 1$ e $b = 0)$, em qualquer dos casos com grau de indeterminação 1,
- impossível se $(a = 0$ e $b \neq -2)$ ou $(a = 1$ e $b \neq 0)$.

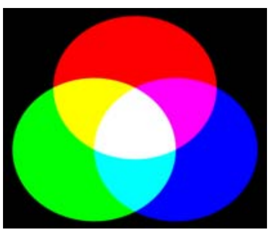
Exercício 6:

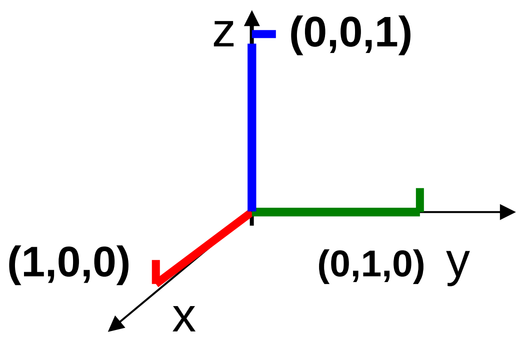
Discuta o sistema em função do parâmetro a:

$$\begin{cases} ax - z + (a+1)w = 1 \\ -x + y + z + w = a \\ (a-1)x + y + (a-2)z + 2aw = a - 2. \end{cases}$$

Aplicações-Cores dos Ecrãs de Televisão

As cores dos ecrãs de televisão são baseadas no **modelo** de cores **RGB** (red, green and blue). Neste modelo, as cores são criadas a partir das três cores: vermelho, verde e azul.





Se identificarmos estas cores com os vectores de $\mathbb{R}^3$

Definição

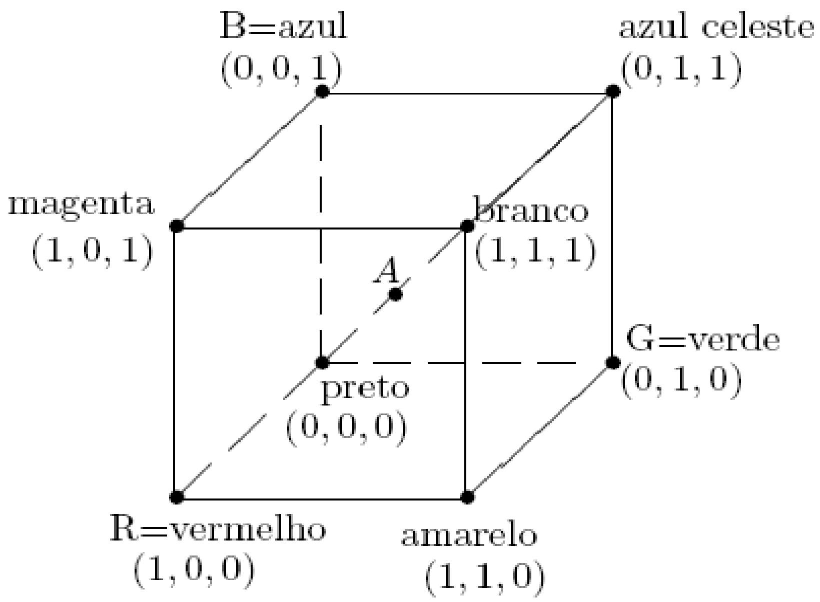
Um vector w de $\mathbb{R}^n$ é **combinação linear** dos vectores $v_1, v_2, ..., v_p$ de $\mathbb{R}^n$ se w pode ser expresso na forma

$$w = c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... + c_p v_p \qquad c_1, c_2, ..., c_p \in \mathbb{R}$$

A cor (α, β, γ) é da forma

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1), \qquad \alpha, \beta, \gamma, \in [0,1].$$

O conjunto ds cores resultantes identifica-se com o cubo:



A cor cinzenta é A= (1\2,1\2,1\2). Poderá ser escrita apenas com os vectores R,B e amarelo? Qual a intensidade de cada um?

Resposta:
Pretende verificar-se se existem α, β, γ tal que

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,0,1) + \gamma(1,1,0)$$

ou seja, resolver o sistema

$$\begin{cases} \alpha \quad +\gamma = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \\ \gamma = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = 0, \beta = \frac{1}{2}, \gamma = \frac{1}{2}$$

Pode a mangenta ser obtida a partir de R,G e Amarelo?